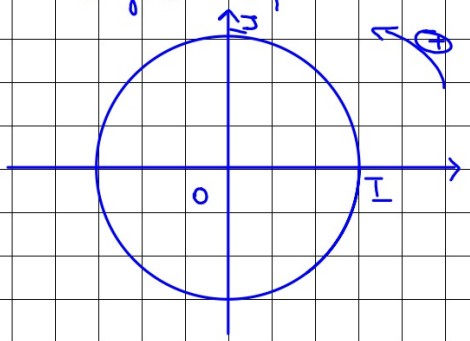
Ch3 : Trigonométrie.

Dans le chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

I. Le cercle trigonométrique.

Déf : On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On dit alors que le cercle est orienté dans le sens direct ou positif trigonométrique



Rq : * Si I et J sont placés comme dans la figure ci-dessus, le sens direct est le sens faisant passer de I à J par le + court chemin.

On dit alors que (O, I, J) est un repère orthonormé direct.

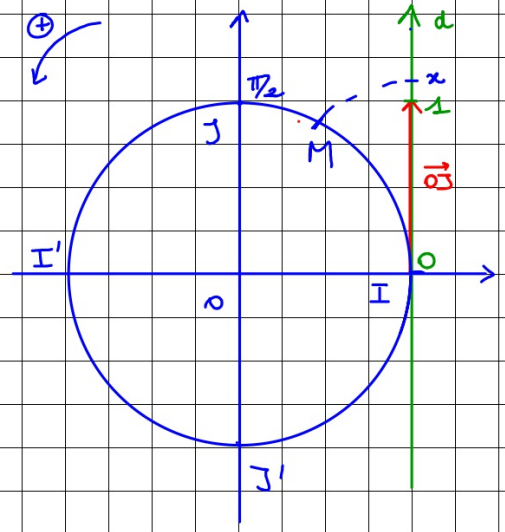
* le périmètre d'1 cercle de rayon R est $2\pi R$.

donc le périmètre du cercle trigonométrique est 2π (car $R = 1$).

et la longueur du demi cercle est π

et celle d'un quart de cercle est $\frac{\pi}{2}$.

II Image d'1 réel sur le cercle trigonométrique.



On sait que l'ensemble des nbs réels peut être représenté graphiquement par une dte. Imaginons qu'on "colle" cette dte au cercle trigonométrique de telle façon qu'elle soit perpendiculaire à (OI) et que le nombre 0 de l'axe réel se retrouve sur I, orientée vers le ht.

On peut alors enrouler l'axe des réels autour du cercle trigonométrique. Ainsi les réels positifs sont enroulés ds le sens direct ou positif et les réels négatifs sont enroulés ds le sens indirect ou négatif.

Déf : A tout réel x de la droite d, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique par enroulement de l'axe des réels autour de ce cercle. On dit alors que M est l'image de x sur ce cercle.

Exples :

* Le pt I est l'image des réels :
$0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, -2\pi, -4\pi, -6\pi, \dots$

* Le pt J est l'image des réels
$\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{11\pi}{2}, \dots$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ | $-\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{7\pi}{2}$.

$\frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$. | $-\frac{3\pi}{2} - 4\pi = -\frac{11\pi}{2}$.

* Le pt I' est l'image des réels :
$\pi, 3\pi, 5\pi, \dots, -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$

* Le pt J' est l'image des réels.
$\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{9\pi}{2}, \dots$

$\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$.

$\frac{3\pi}{2} + 4\pi = \frac{11\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{9\pi}{2}$

Pté : Deux réels x et y ont le même pt image sur le cercle trigonométrique ssi $x - y = 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Rq : On dit alors que x et y sont égaux modulo 2π et on le note $x \equiv y \pmod{2\pi}$.

Application : Dans chacun des cas suivants dire si les nb x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique.

1) $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad y = -\frac{3\pi}{2}$.

2) $x = \frac{2\pi}{3}$ $\quad y = -\frac{\pi}{3}$

3) $x = -\frac{5\pi}{12}$ $\quad y = \frac{43\pi}{12}$.

1) $x - y = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \times 1$

oui.

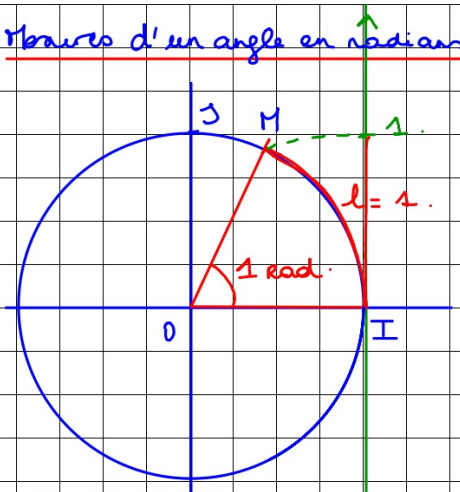
2) $x - y = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$

non.

3) $x - y = -\frac{5\pi}{12} - \frac{43\pi}{12} = -\frac{48\pi}{12} = -4\pi = 2\pi \times (-2)$

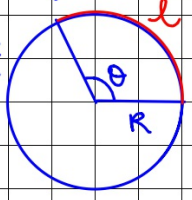
oui.

III Mesures d'un angle en radians.



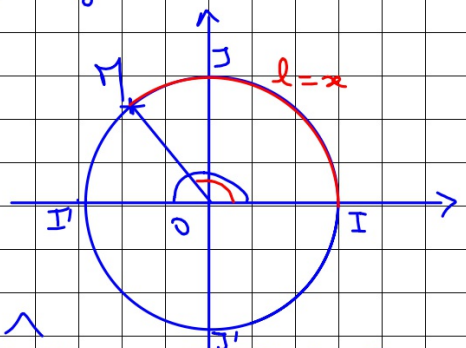
Déf : Si M le pt image du réel 1 sur le cercle trigonométrique, la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ est égale à 1 radian, noté 1 rad.

Ptés :



$l = R \times \theta_{(rad)}$

Déf : Si M un pt du cercle trigonométrique tout nb x dt le pt M est l'image sur le cercle trigonométrique est appelé mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.



$\widehat{IOM} = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Rq : Un même angle possède une infinité de mesure en radian.

Déf : Parmi toutes les mesures de l'angle on définit une mesure principale qui appartient à $]-\pi ; \pi]$.

Rq :
$\widehat{IOJ} = 90°$ et $\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2}$ Rad.
$\widehat{IOI'} = 180°$ et $\widehat{IOI'} = \pi$ Rad.

Correspondance degré/radian.

Angle en degré	180	
Angle en Radian	π	

Tabl de proportionnalité

Exple 1) Donner une mesure en radian des angles suivants : 30°, 45°, 60°

2) Donner la mesure en degré des angles suivants
$\frac{3\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{3}$.

$\frac{3\pi}{12} = \frac{3\times 180}{12} = 45°$; $\frac{5\times 180}{6} = 150°$; $\frac{7\times 180}{3} = 420°$.

1)

π	?
180	30

$\frac{30\times\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ Rad.

π	?
180	45

$\frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ Rad.

π	?
180	60

$\frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ Rad.

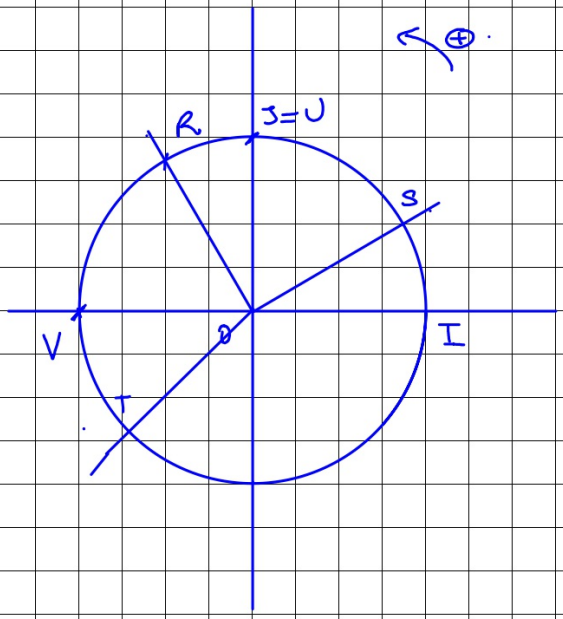
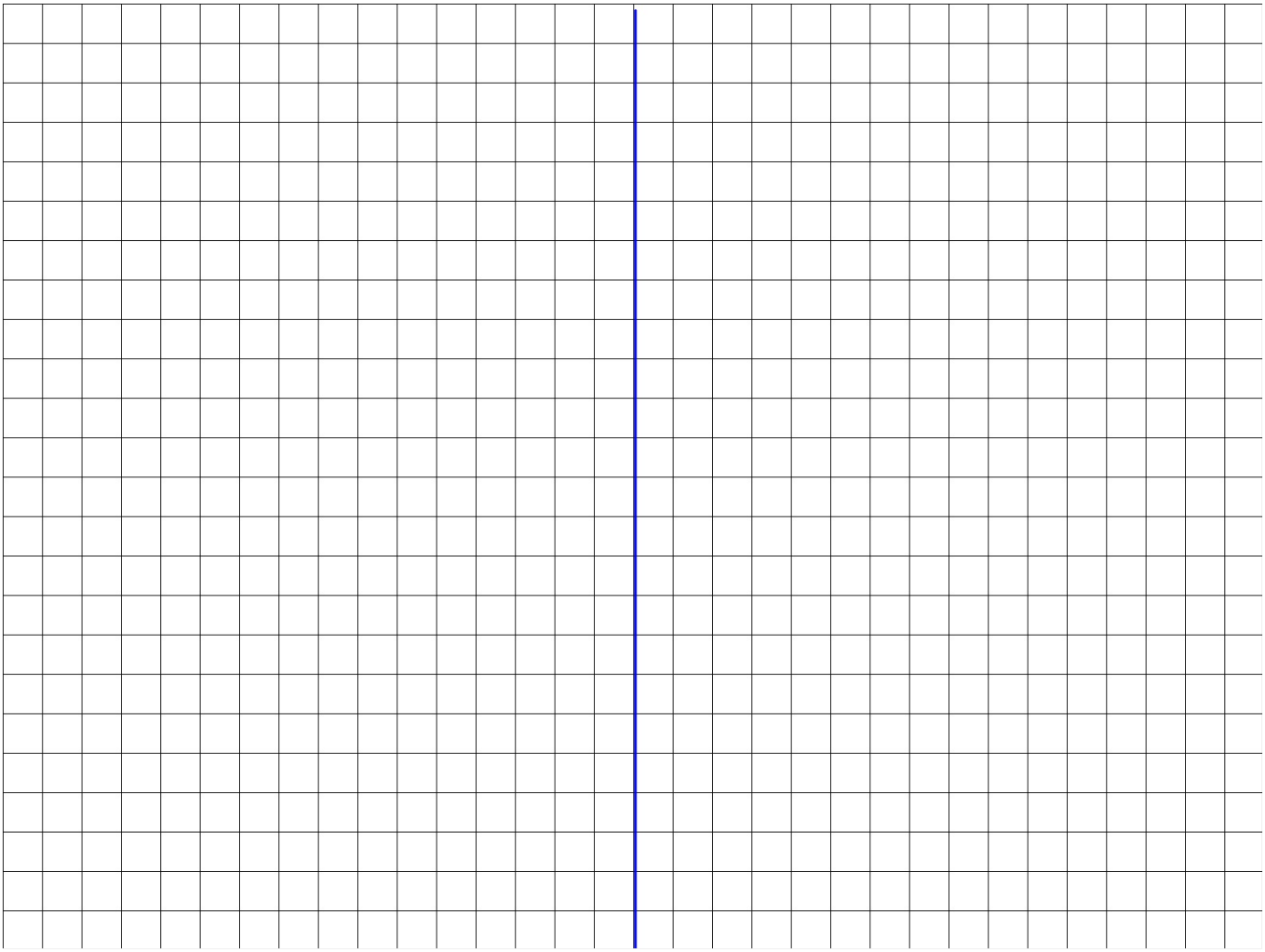
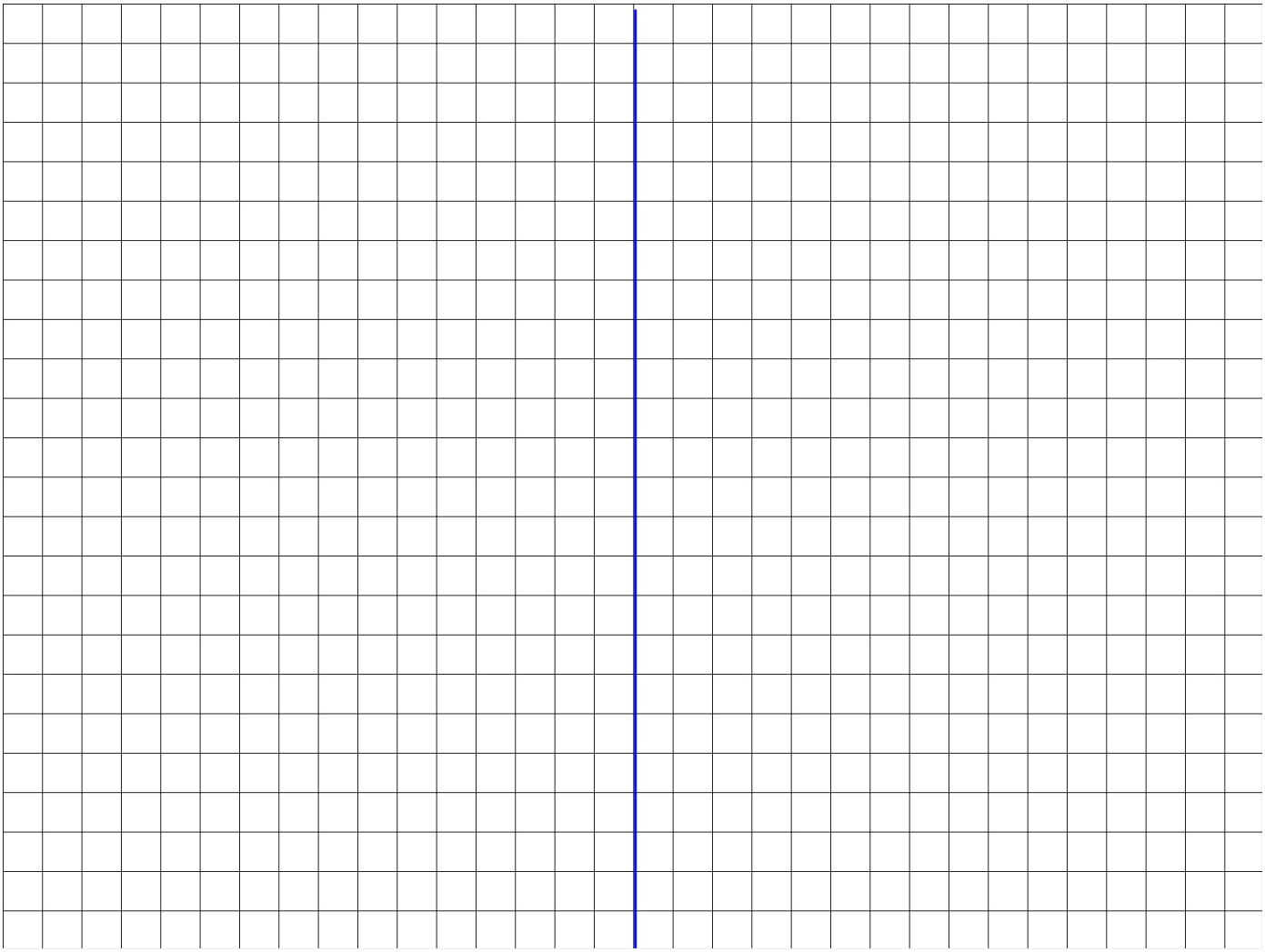
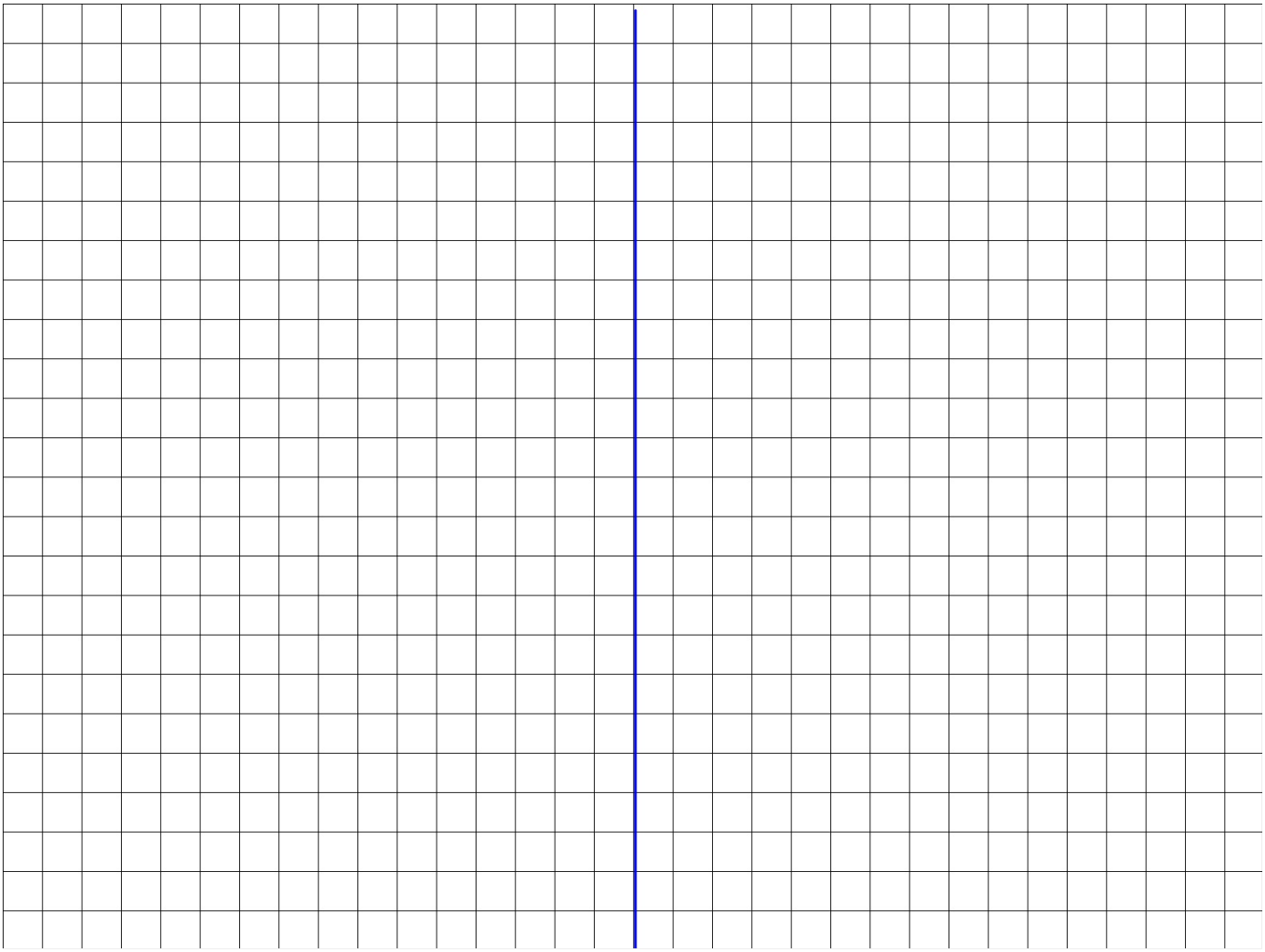
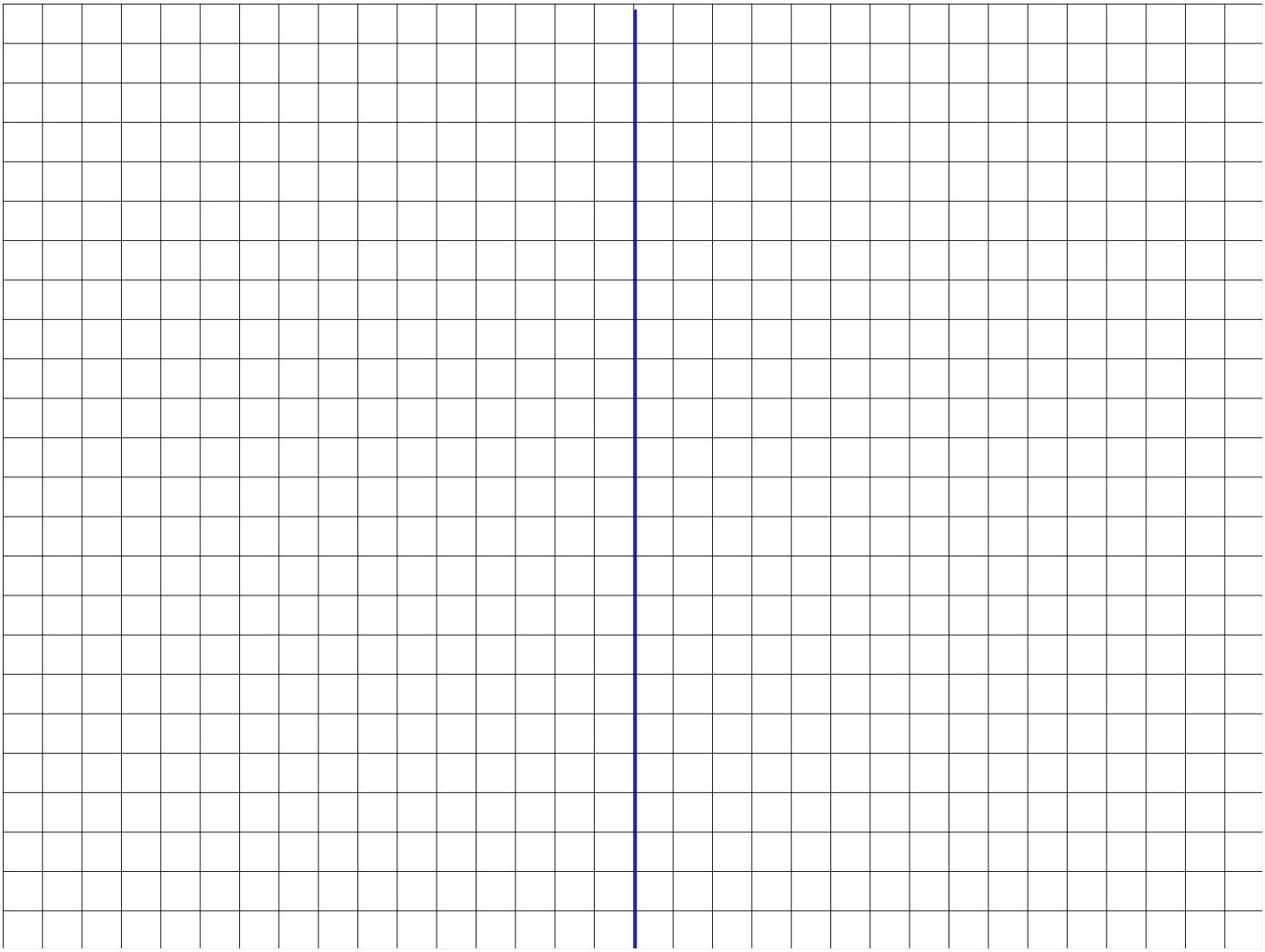
p212

2 Sur le cercle trigonométrique, placer les points R, S, T, U et V associés respectivement aux réels $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{21\pi}{4}$, $-\frac{19\pi}{2}$ et -15π.

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\times 180}{3} = 120°$ → $\widehat{IOR} = 120°$.

$\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6} = \frac{180}{6} = 30°$ → $\widehat{IOS} = 30°$.

$\frac{21\pi}{4} - 4\pi = \frac{5\pi}{4} = \frac{5\times 180}{4} = 225°$ → $\widehat{IOT} = 225°$

$-\frac{19\pi}{2} + 8\pi = -\frac{3\pi}{2}$.

$-15\pi + 14\pi = -\pi$.